Cómo abordar la multiplicación y la división de fracciones

Lucía Zapata Cardona
Facultad de Educación,
Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen: El presente trabajo exhibe algunas reflexiones sobre cómo se ha abordado la multiplicación y división de fracciones en la educación primaria. Seguidamente, presenta dos formas exitosas de abordar la multiplicación y división de fracciones: (1) la estrategia de franjas y (2) la estrategia de rectángulos con particiones múltiples (o rejilla). Estas estrategias se caracterizan por presentar la multiplicación y división de fracciones en contextos reales y sin recurrir a la aplicación inicial del algoritmo, lo cual ayuda al escolar no sólo a enfrentarse a la complejidad de la multiplicación y división de fracciones sino también a construir el sentido de fracción.

Algunas reflexiones sobre la enseñanza de fracciones

No es sorprendente que los escolares de educación elemental inicial vean las matemáticas como su materia favorita y se desempeñen creativamente en ella hasta que empiezan el estudio de las fracciones. La llegada de las éstas a los salones de clase de matemáticas hace que la atracción inicial que los escolares sentían por las matemáticas cambie la historia de muchos.[1]

Esto no sorprende, porque cuando los escolares empiezan el estudio de las fracciones, tienen una amplia experiencia con los números enteros naturales. Esta experiencia será su punto de apoyo, pero también se constituirá en un obstáculo frente al reto de comprender este nuevo sistema numérico. Los escolares, antes de iniciar el estudio de las fracciones, han sido expuestos al estudio de los números enteros naturales, y cuando empiezan a sentirse seguros y familiarizados con el manejo de operaciones aritméticas básicas en ellos, el panorama es repentinamen-

1 RIDDLE, M. y RODZWELL, B., 2000.

te cambiado por un extraño sistema numérico que no se parece a los naturales ni obedece sus reglas. En este nuevo sistema numérico de números racionales, los escolares tienen que enfrentar muchas rupturas, tales como que los números no tienen siguiente, que la multiplicación no siempre se puede interpretar como una suma reiterada y que no siempre hace el producto mayor que cada uno de sus factores. Otros aspectos que el escolar tiene que conciliar son que, por ejemplo, el 4 de la fracción ¼ no significa las cuatro unidades que se podían contar cuando se trabajaba con los números naturales. Este 4 en el nuevo sistema numérico significa el número de particiones y esta transición no es fácil de hacer para un escolar de primaria básica, cuya experiencia aditiva, numérica y cuantitativa previa, está asociada a números enteros naturales. Reconocidos autores[2] siguen mostrando que cuando los escolares empiezan a operar con fracciones, tratan de replicar las propiedades de los enteros naturales. Así, cuando descubren que 1/2 + 3/5 no es 4/7 y que 1/2 no es menor que 1/3, es como si las operaciones aritméticas con fracciones violaran todos los algoritmos aprendidos para los naturales y tuvieran que aprender una nueva matemática.

Si a estas dificultades que enfrenta el escolar sumamos el tipo de instrucción que tiene lugar en nuestras clases de matemática, la situación es mucho más compleja. Nuestra instrucción en matemáticas se ha centrado prioritariamente en instruir a los escolares con respecto a los algoritmos para realizar diferentes operaciones aritméticas. El resultado ha sido que muchos escolares son excelentes haciendo computaciones, pero carecen de la noción de fracción.[3] Adicionalmente, la forma en que se aborda el estudio de las fracciones carece de contextos reales. Las clases son abordadas formalmente y se espera que al terminar la instrucción, el escolar esté en condiciones de aplicar el algoritmo a situaciones reales, pero ¿cómo se espera que el alumno aplique el algoritmo a una situación si no ha sido expuesto a solucionar problemas en contextos reales? Algunos autores incluso han sugerido que el estudio formal de las fracciones no debería tener lugar en los primeros años de primaria; que esta temática debería ser postergada para el final de ese nivel educativo, donde los estudiantes han conseguido un pensamiento más abstracto requerido para abordar la complejidad de las fracciones.[4] Países como

2 ITZCOVICH, H. y otros, 2007; MATEOS, P., 2008; STEFFE, L., 2002.
3 KOUBA, V. y otros, 1997.
4 WATANABE, T., 2001.

Japón, sólo introducen las fracciones hasta el cuarto grado y aunque esto parezca un poco descabellado para muchos de nosotros, sorprende que los resultados del TIMSS (citado por Watanabe[5]) parecen confirmar que retrasar la introducción formal de fracciones no parece afectar el desempeño de los estudiantes en el entendimiento de las mismas.

Vale la pena entonces pensar que la instrucción formal en fracciones debería ser dejada para el final de la escuela primaria, después que los escolares hayan alcanzado una clara comprensión del sentido de fracción. La instrucción previa debería involucrar al escolar en un sinnúmero de experiencias que le ayuden a construir el concepto de fracción. Ellas podrían estar compuestas de particiones de figuras geométricas, particiones de grupos de objetos y particiones de medidas de tiempo, siempre embebidas en un contexto real. Estas experiencias son matemáticamente ricas y pueden ser incluidas cuando se trabaja geometría, sistemas métricos, periodos temporales (media hora, un cuarto de hora), sistemas numéricos y situaciones de reparto o descuento. El currículo de matemáticas debería promover habilidades para pensar críticamente a través de situaciones problema que desafíen su razonamiento. Un algoritmo sugiere un limitado desafío: aplicar correctamente el algoritmo. Uno de los problemas que se presenta con los escolares que son muy diestros en la aplicación de los algoritmos, es que tienen dificultades para generalizar cuando la situación es más compleja,[6] se vuelven dependientes de la distribución espacial de los números y renuncian a su propio pensamiento numérico.[7] Ciertos autores han reportado que algunos escolares que aplican los algoritmos rápidamente y sin errores han presentado dificultad al decidir qué operación usar cuando se les pide resolver una situación problema y no la aplicación de un algoritmo.[8]

Es muy interesante hacer notar que casi todos los estudiantes que tienen que solucionar situaciones de fracciones, las hacen completando la fracción, pero el algoritmo lo realiza haciendo denominadores comunes, lo cual es poco frecuente en los algoritmos que inventan los escolares.[9] No es extraño entonces que los escolares tengan dificultad incorporando su es-

5 *Ibíd*.
6 WU, Z., 2001.
7 KAMII, C., 1994.
8 ABRANTES, P. y otros, 2002.
9 RIDDLE M. y RODZWELL, B., 2000.

tructura conceptual a la instrucción que es impartida en el aula de clase por sus profesores. Los escolares no deberían empezar por aplicar los algoritmos de multiplicación y división de fracciones, sino en entender el concepto de fracción para desarrollar procedimientos que tengan sentido para ellos. También es necesario mencionar que el estudiante necesita abordar el estudio de las fracciones en contextos claros y familiares para él, contextos que la mayoría de las veces están casi ausentes o si los hay, son poco relevantes.[10]

Es necesario que el escolar sea expuesto a una cantidad de situaciones que le ayuden a entender el sentido de fracción antes de empezar a hacer operaciones. La noción de fracción no solamente tiene que indicar que el estudiante la reconoce como una partición de una unidad siguiendo el esquema parte-todo (la mitad de una naranja, un tercio de una pizza, o un cuarto de un rectángulo). También debe indicar el resultado de un reparto (cinco barras de chocolate para repartir entre tres personas), una constante de proporcionalidad (un plano de un parque está construido de tal forma que 2 cm representan 5 m. Si el área de la cancha de baloncesto en el plano es 168 cm ¿cuál será el área real?), o una porción de un conjunto de varios elementos (la mitad de mis compañeros de clase, un tercio del dinero que tengo en el bolsillo). Es necesario también exponer al escolar a la noción de fracción en contextos de fracciones impropias (una receta necesita 2/5 de una taza de harina) y a comparaciones entre fracciones (si Juan come un tercio de una pizza y María come 3/12 de la misma pizza, ¿quién come más?).

Uno de los objetivos de este trabajo, es mostrar que hay múltiples formas de abordar las operaciones con fracciones sin necesidad de acudir a los algoritmos preestablecidos que ocultan la creatividad de los escolares. Estos deben ser expuestos a una gran cantidad de experiencias basadas en el uso de material didáctico y apoyado en contextos reales y relevantes, antes de ser introducidos en los algoritmos para operar con fracciones. Vale la pena mencionar que los mejores solucionadores de problemas son los escolares que cuentan con múltiples representaciones en su razonamiento. Esta variedad les da la flexibilidad necesaria para cambiar sus representaciones de forma que se acomoden a nuevas situaciones problema.[11]

10 GÓMEZ, R., 2008.
11 LESH, R. y otros, 1983.

La siguiente propuesta es un intento por ayudar a los escolares a reducir la frustración que sienten cuando inician el estudio de fracciones, además de apoyar a profesores y padres de familia en la introducción de la multiplicación y división de fracciones abordadas desde dos estrategias (1) diagrama de franja y (2) diagrama de rectángulos con particiones múltiples (o rejilla).

Multiplicación de fracciones

El objetivo de la introducción de la multiplicación de fracciones no está en afianzar la computación, sino en la comprensión de la operación de la multiplicación. Muchos profesores de primaria coinciden en que no tienen dificultad al enseñar multiplicación de fracciones; su justificación está basada en el hecho de que el algoritmo de la multiplicación de fracciones es similar al algoritmo para multiplicar números enteros naturales. Sin embargo, si se investiga a los escolares por su noción de multiplicación con fracciones, posiblemente no seríamos tan exitosos, pues diversos autores han mostrado que incluso estudiantes universitarios tienen la idea de que multiplicación siempre hace el producto mayor que cada uno de sus factores,[12], pero en multiplicación de fracciones esto no siempre sucede.

Otro problema que podría presentarse en la multiplicación de fracciones, sería la aplicación de la definición de multiplicación como *suma reiterada* que se fortalece en el sistema de los naturales. Esta definición es insuficiente para la multiplicación entre fracciones. Por ejemplo, si se propone al escolar la situación problema 1, la aplicación de la concepción de multiplicación como suma reiterada sería casi directa.

> Situación Problema 1
>
> Una receta requiere ½ libra de mantequilla, si se quiere triplicar la receta, ¿cuántas libras de mantequilla se necesitarían?

Para solucionar esta situación, posiblemente la definición de suma reiterada tendría sentido, porque se podría expresar como ½ más ½ más ½ (es decir un medio tres veces). Pero si la situación es más compleja,

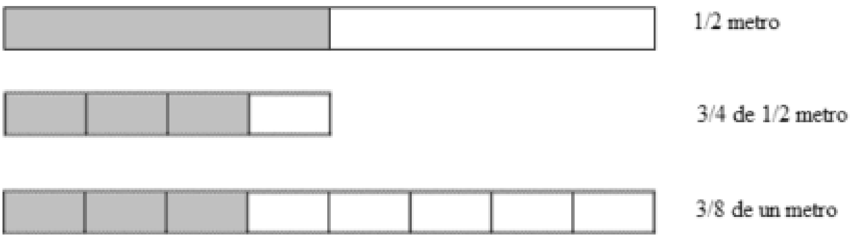
---

12 TIROSH, D. y GRAEBER, 1989.

como la descrita en la situación problema 2, la suma reiterada podría no ser fácilmente interpretada.

> Situación Problema 2
>
> Adriana necesita medio metro de cinta para un laboratorio de ciencias, pero cuando llegó a su clase se dio cuenta que con ¾ de lo que tenía era suficiente. ¿Qué fracción de metro usó Adriana?

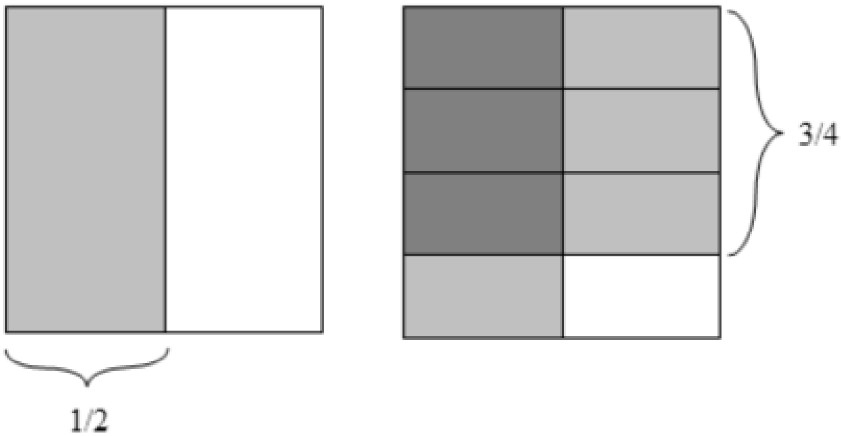
Aprovecharé la situación problema 2 para introducir las dos estrategias de solución que pretendo mostrar en este manuscrito. La primera es la estrategia de la franja,[13] la cual puede ser visualizada gráficamente en la figura 1.



La figura 1 muestra que de una franja de un metro de longitud se sombrea la mitad (el medio metro que ha llevado Adriana para su laboratorio de ciencias). La parte que se sombrea de la franja de un metro de longitud será una nueva unidad de medida que se partirá en cuartos y se sombrearán tres pedazos (los tres cuartos que ha usado Adriana en su laboratorio). A continuación se toma la unidad de medida inicial (toda la franja de un metro) y se le hacen las particiones sugeridas por la nueva unidad de medida. Por último, se determina a qué fracción de la unidad de medida inicial (de la franja de un metro) corresponde la parte sombreada de la nueva unidad de medida (la parte que realmente gastó Adriana en su laboratorio de ciencias). Como la parte sombreada de la nueva unidad de medida corresponde a 3/8 de la unidad de medida inicial, se determina que Adriana ha gastado 3/8 de un metro para su laboratorio de ciencias.

13 Una versión más primitiva de estrategia de la franja ha sido ampliamente usada en el currículo de Singapur, el cual ha estado en el primer lugar por varias veces consecutivas en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS por sus siglas en ingles).

Otra forma de dar solución a la situación problema 2 es usando la estrategia de los rectángulos con particiones múltiples (o rejilla). La figura 2 ilustra gráficamente una forma de hacerlo. Primero, se elige un rectángulo que representará la unidad de medida inicial (un metro de cinta) y en ella se hace la partición (siguiendo una sola dirección, vertical u horizontal) y se sombrea la fracción que corresponde a la mitad. Luego, en el mismo rectángulo, pero haciendo una partición en dirección contraria[14] a la hecha con la primera fracción, se hace la partición sugerida por la segunda fracción y se sombrea la parte correspondiente a ¾ (lo que realmente gastó Adriana en su laboratorio). A continuación se compara a qué porción de la unidad de medida inicial (el metro de cinta) es la parte doblemente sombreada, que en este caso es 3/8 de metro. Así se llega nuevamente a la conclusión de que Adriana utilizó 3/8 de metro de cinta para su laboratorio de ciencias.



División de fracciones

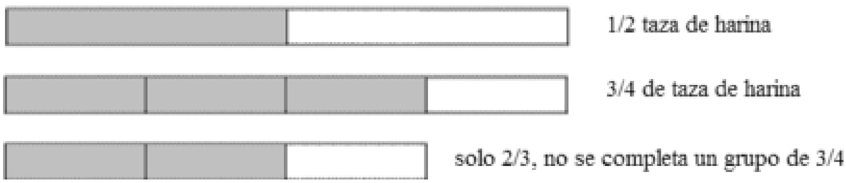
Una de las dificultades que se podría presentar, comprendiendo la división de fracciones, está relacionada con la concepción de la división como una resta reiterada (similar a la concepción de multiplicación como adición reiterada). Hay escenarios en los que una resta reiterada sería una interpretación válida para la división de fracciones, pero hay otros en los cuales esta concepción quedaría corta, como para el escenario descrito en la

14 Tenga en cuenta que la partición de la primera fracción se hizo con particiones verticales. Para la segunda fracción se debe usar particiones horizontales.

situación problema 3. Sin embargo, una interpretación que podría tener más sentido para comprender la división de fracciones sería la interpretación de *¿cuántos grupos?* que se hace en la división de los naturales.[15] Por ejemplo, en la división con naturales, cuando se dice 15 dividido entre 3, significa el número de grupos que podemos hacer cuando dividimos 15 en grupos con 3 elementos.

> Situación problema 3
>
> Hay ½ de taza de harina y una receta para galletas necesita ¾ de taza de harina. ¿Cuántas tandas de la receta se podrían preparar con la harina disponible?

Para dar solución a la situación problema 3, podríamos aplicar la definición de división en los naturales y preguntar ¿cuántos grupos de ¾ se pueden formar de ½? Aquí también tendremos dos representaciones gráficas diferentes para dar solución a la situación. La estrategia de la franja es presentada gráficamente en la figura 3.

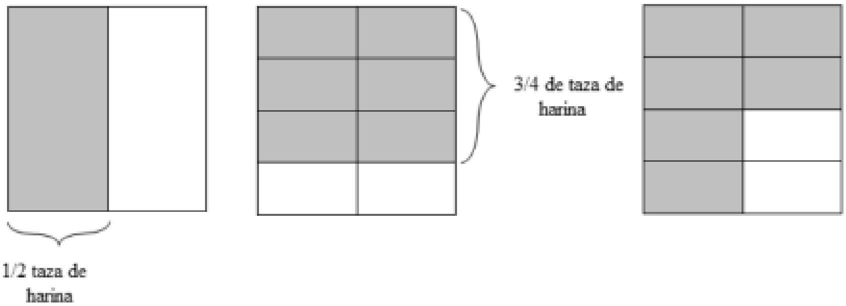


Observe que la primera franja de la figura 3 representa una taza de harina. Se ha sombreado la mitad, que es lo que se va a dividir, y que es la unidad de medida inicial (la media taza de harina disponible). En la segunda franja, se toma como referencia una taza de harina, se hacen las particiones referentes a ¾ de taza y se sombrea. Esta vez los ¾ serán la nueva unidad de medida (este será el tamaño de los grupos para la división). La clave de comprender este procedimiento está en lo que se haga a partir de este momento. Tenemos que preguntar, ¿cuántos grupos de ¾ de taza se pueden hacer con ½ taza de harina? Se toma entonces la nueva unidad de medida (3/4 de taza) y se establece cuantos grupos se pueden hacer de la unidad de medida inicial (media taza). La tercera franja de la figura 3 muestra que el grupo de tamaño ¾ no se ha llenado con media taza. Sólo se ha llenado 2/3 de la nueva unidad de medida. Así que

15 BECKMANN, S., 2005.

con media taza de harina sólo se puede preparar 2/3 de la receta que requiere ¾ de taza de harina.

De forma similar se puede usar la estrategia de los rectángulos con particiones múltiples (o rejilla) para solucionar la situación problema 3. La figura 4 ilustra gráficamente cómo se puede dar solución.



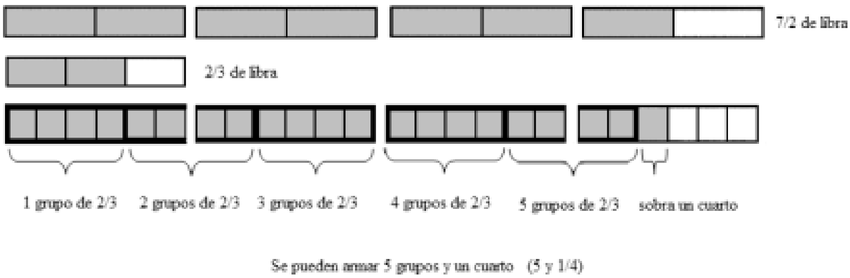
El primer rectángulo de la figura 4 muestra la partición correspondiente a la cantidad que va a ser dividida y que representará la unidad de medida inicial (media taza de harina). A continuación, en el mismo rectángulo, pero siguiendo particiones contrarias a las hechas para la unidad de medida inicial, se hacen las particiones correspondientes a la fracción que representa el tamaño de los grupos de la división (3/4 de taza). Posteriormente hacemos la pregunta ¿cuántos grupos de ¾ pueden hacerse con ½ taza de harina? Si reacomodamos el segundo rectángulo de la figura 4 y generamos el tercer rectángulo, podemos notar que la parte sombreada del primer rectángulo de dicha figura es sólo 2/3 de la parte sombreada del tercer rectángulo.

Las situaciones problema que se han presentado hasta el momento son situaciones que representan fracciones propias, pero esto no quiere decir que las estrategias sólo funcionen para fracciones propias. La situación problema 4 ilustra un escenario en el cual las fracciones involucradas son fracciones impropias y así no quede duda de la efectividad de estas estrategias en la solución de problemas.

> Situación problema 4
>
> Un recipiente tiene capacidad para 7/2 de libra de golosinas y está lleno de golosinas. Si se quieren reubicar estas golosinas en recipientes

de 2/3 de libra, ¿qué porción de los recipientes de 2/3 de libra se llenarían?

Para solucionar esta situación iniciemos visualizando como se representaría usando la estrategia de la franja. La figura 5 ilustra la solución.

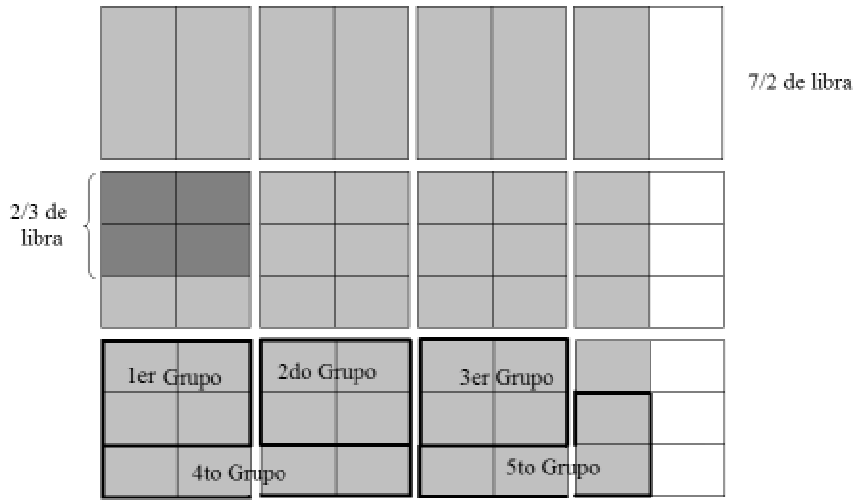


El primer grupo de franjas de la figura 5 representa 7/2 de libra de golosinas. La segunda fila 5 representa 2/3 de libra de golosinas. Luego la pregunta clave que se debe hacer es ¿cuántos grupos de 2/3 de libra se pueden armar de 7/2 de libra para encontrar el número de recipientes necesitados? Seguidamente, en la franja que representa la cantidad que se va a repartir (7/2 de libra) se hacen divisiones de cada unidad en medios y tercios (medios debido a 7/2 y tercios debido a 2/3) las nuevas particiones resultantes de las particiones múltiples deben ser de igual tamaño (en este caso sextos, porque 6 es el mínimo común múltiplo (MCM) de 2 y 3[16]). Luego se arman los grupos de 2/3 de libra en la representación 7/2 libras. Las llaves y el resaltado en negro del tercer grupo de franjas en la figura 5 nos ayudan a visualizar que se pueden armar 5 grupos de 2/3 de libra y sobra un cuarto de grupo. Así se llenarían 5 ¼ recipientes de 2/3 de libra.

Para usar la estrategia de rectángulos con particiones múltiples (o rejilla) se procede similarmente. La figura 6 ilustra visualmente la forma como esta estrategia puede ser usada. Primero se arman los rectángulos que representan 7/2 de libra de golosinas (representados en la primera línea

16 Este momento de las particiones múltiples de la unidad puede ser aprovechado para reforzar el concepto de MCM, el cual es un resultado muy usado en el algoritmo de la suma y resta de fracciones, pero poco comprendido por los escolares. Vale la pena invertir algún tiempo en explorar las implicaciones de estas particiones múltiples en la construcción del concepto del MCM que será esencial cuando la introducción formal de los algoritmos tenga lugar.

de la figura 6). A continuación, y sobre la misma representación de 7/2 de libra pero en sentido contrario, se hace la partición correspondiente a 2/3 de libra (como 7/2 de libra se representó en sentido vertical, 2/3 se representará en sentido horizontal) y se sombrea la parte que representa 2/3 de libra. Luego se hace la pregunta ¿cuántos grupos de 2/3 de libra se pueden formar de 7/2 de libra? y se cuenta cuantos grupos de 2/3 se pueden formar de la representación de 7/2. La tercer línea de rectángulos de la figura 6 ilustra como la cantidad que representa 2/3 de libra se ha acomodado tantas veces para encontrar el número de recipientes necesitados. Así se ha encontrado 5 grupos y un cuarto de grupo.



Se formaron 5 y 1/4 de grupos de 2/3 de libra

Conclusiones

Las estrategias presentadas en este trabajo apoyan la construcción de las nociones de fracción, multiplicación y división de fracciones sin necesidad de abordar los algoritmos formales. Estas estrategias pueden constituir un excelente escenario para la exploración, ambientación y construcción en el aula previo a la introducción formal de los algoritmos. No es conveniente iniciar con el algoritmo sin exponer a los escolares a la exploración de diferentes situaciones que requieran material didáctico y que estén enmarcadas en contextos reales. La ventaja de trabajar con material didáctico es que ayuda a los escolares a construir una imagen mental de lo que pasa en concreto. Esto puede tomar un poco de tiempo y para algunos estudiantes podría tomar más tiempo que para otros, sin embargo es necesario también tener en cuenta que el material didáctico no trabaja por sí solo. Es necesario acompañar estas estrategias didácticas con discusiones matemáticas y darle la bienvenida al discurso matemático necesario para generar conocimiento matemático.▲

Bibliografía

ABRANTES, Paulo y otros. *La resolución de problemas en matemáticas: Teoría y experiencias*. Grao. España. 2002.

BECKMANN, Sybilla. *Mathematics for elementary teachers.* Boston Pearson/Addison-Wesley. 2005.

GÓMEZ Yépez, Ricardo. Análisis de los resultados de la evaluación PISA 2006: Un recorrido por los caminos opuestos del privilegio y la precariedad, en *Educación y Pedagogía, 50*, 123–140. 2008.

ITZCOVICH, Horacio. RESSIA de MORENO, Beatriz. NOVEMBRE, Andrea. BECERRIL, María y GVIRTZ, Silvina. *La matemática escolar: Las prácticas de enseñanza en el aula*. Grao. Argentina. 2007.

KAMII, Constance. *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Visor. España. 1994.

KOUBA, Vicky. ZAWOJEWSKI, Judith. y STRUTCHENS, Marilyn. What do students know about numbers and operations? En KENNEY, Patricia Ann y SILVER, Edward (Eds.), *Results from the sixth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 87–140). Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics. 1997.

LESH, Richard. LANDAU, Marsha. y HAMILTON, Eric. Conceptual models in applied mathematical problem solving research. En LESH, Richard y LANDAU, Marsha. (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 263–343). Academic Press. New York 1993.

MATEOS Ponce, Tereza. Una aproximación a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Ethos Educativo, 41*, 193–208. IMCED. Morelia, México. 2008.

RIDDLE, Margaret y RODZWELL, Bette. Fractions: What happens between kindergarten and the army? *Teaching Children Mathematics, 7*, 202–206. 2000.

STEFFE, Leslie. A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20.* 267–307. 2002.

TIROSH, Dina y GRAEBER, Anna. Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics, 20.* 79–96. 1989.

WATANABE, Tad. Let's eliminate fractions from primary curricula! *Teaching Children Mathematics, 8.* 70–72. 2001.

WU, Zhijun. Multiplying fractions. *Teaching Children Mathematics, 8.* 174–177. 2001.