¿Sesenta y cuatro igual a sesenta y cinco?

O lo que es lo mismo: ¿cero igual a uno?

Albino Méndez Heredia
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa.
Profesor Titular “C” de Enseñanza Superior del IPN
adscripción CEC Unidad Morelia del IPN

En cierta ocasión, acudí al maestro carpintero con el fin de que me cortara unas tablas de triplay de cinco pulgadas por cinco pulgadas exactamente, en cuatro de dos y media pulgadas por dos y media pulgadas; a lo que éste repuso: *así como usted quiere no se puede por lo que se pierde en los cortes, una de dos, le quedarían escasas de dos lados o solo sale una de cada tabla.*

Este detalle que toma muy en cuenta el artesano en su trabajo cotidiano, escapa muy frecuentemente al profesor en el aula y en la enseñanza de la geometría elemental; muchas veces se pretende establecer demostraciones mediante recorte y pegado de figuras, pero ¿Qué tan sólidos desde el punto de vista matemático resultan estos recursos didácticos?

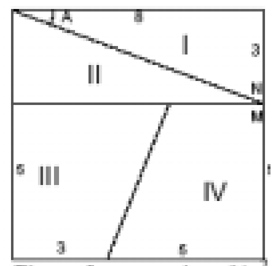
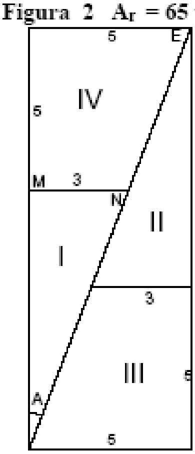


Figura 1 $A_c = 64u^2$

El siguiente ejemplo cuyas consecuencias y generalidades han apasionado a los estudiosos de las curiosidades matemáticas, ya que muchos autores se han ocupado de él, nos dará una singular respuesta a la pregunta anterior.

Figura 2 $A_r = 65\ u^2$



Si en un cuadrado de ocho unidades por ocho unidades de lado, se trazan dos triángulos y dos trapecios, como indica la figura 1, se recortan y con las cuatro piezas se forma un rectángulo (figura 2), el área del cuadrado es ocho unidades por ocho unidades; igual a sesenta y cuatro unidades cuadradas, en tanto que el área del rectángulo es… ¡cinco unidades por trece unidades!... igual a ¡sesenta y cinco unidades cuadradas! ¿De dónde procede la unidad de más en el rectángulo, si éste fue construido con las mismas piezas que formaban el cuadrado.

Este ejemplo es muy antiguo, en la biblioteca de la Benemérita Universidad de Puebla, dentro de un libro *Del Principia matemática* de Newton. Escrito en latín encontré una amarillenta hoja de papel en la que se representaba una balanza en equilibrio, en el platillo izquierdo un cuadrado de área igual a sesenta y cuatro unidades cuadradas y en el platillo derecho un rectángulo de sesenta y cinco unidades cuadradas de área. Abajo del dibujo la leyenda:

> ¿64 = 65? Nota: las dos figuras geométricas se consideran del mismo material y del mismo espesor

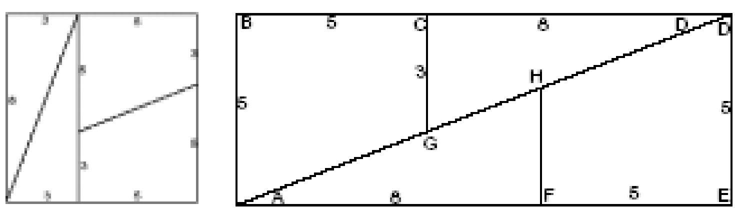
Esa fue la primera referencia que tuve sobre este singular problema y desde entonces ha llamado sumamente mi atención; por lo que me aboqué a buscar bibliografía sobre este problema tan singular.

Veamos como presentan el caso tres autores, cuya autoridad matemática es indiscutible.

Peterson- Hashisaki en su libro *Teoría de la Aritmética*[1] dice:

> Como ejemplo de que demostrar por corte y acomodamiento puede ser engañoso, consideremos la figura 42*:

fig. 42



> El cuadrado es 8x8, por lo tanto tiene área 64. El rectángulo es 5x13, por lo tanto tiene área 65. ¿Dónde está la unidad adicional de área? Antes de leer lo siguiente vea si usted puede desarrollar una explicación.
>
> Los ángulos en C y F son ángulos rectos, lo que significa que el *ajustamiento* a lo largo de la línea HF y CG es perfecta.
>
> Esto deja únicamente a la diagonal AD como un posible lugar para que la unidad cuadrada extra se oculte.

---

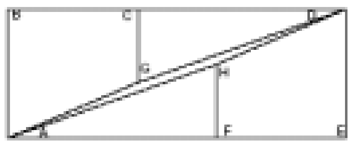
[1] PETERSON - HASHISAKI. *Teoría de la Artimética*. Limusa. México. s.a., pp. 323-324.

* N. del E. El autor del artículo ha respetado la nomenclatura de las figuras en los textos originales.

Puede ser AGHD no sea una línea recta como parece ser, y debemos investigar los ángulos BAF y CDE para estar seguros que son ángulos rectos.

Usaremos las propiedades de los triángulos semejantes. Sabemos que AFE es una línea recta. ¿Porqué?. Observando la figura vemos que HF es paralela a DE, y si AGHD es una línea recta, entonces el triangulo AFH es semejante al triangulo AED. Si estos triángulos son semejantes entonces sus lados correspondientes son proporcionales. Pero $\frac{8}{3} \neq \frac{13}{5}$ por lo tanto estos triángulos no son semejantes.

Si los triángulos no son semejantes entonces AGHD no es una línea recta. Un ligero quiebre en la línea G y H responde de la unidad de área extra. Figura 43:



El Autor de las *Paradojas matemáticas*, Eugene P. Nortrhop hace la siguiente exposición:

Supongamos que dividimos una hoja de papel de 64 cuadritos como los de un tablero de ajedrez. Después lo cortamos en dos triángulos y en dos trapecios, tal como se indica en la figuras 20 (b) y 20(c), los lados del rectángulo que resulta tienen respectivamente 5 y 13 unidades de longitud, de modo que el rectángulo que resulta tiene respectivamente 5 y 13 unidades de longitud, de modo que el rectángulo contiene (5)(13) = 65 cuadritos, mientras que el cuadrado de la figura dada contiene (8)(8) = 64 cuadritos. ¿De dónde procede el cuadrito de más que tiene el rectángulo?

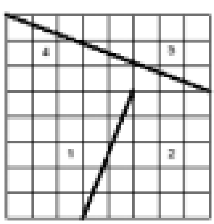


Figura 20 (b)

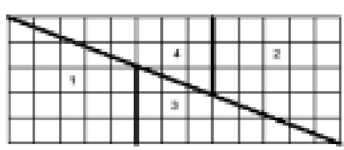


Figura 20 (*c*)

Unidad cuadrada de área "ocultandose en hendiduras"

La verdad es que los bordes de los trozos 1,2,3 y 4, no coinciden en realidad a lo largo de la diagonal PQ, sino que forman el paralelogramo PSQR que se ha exagerado mucho en la figura 20 (c). El misterioso cuadrito no es más que la superficie de este paralelogramo. El ángulo SPR es tan pequeño que nunca se llega a percibir el paralelogramo a menos que se recorten y se coloquen los trozos con mucho cuidado. En realidad es muy fácil ver para los que recuerden la trigonometría, que según la figura tg x = 3/8 o sea: 0,3750, uy tg y = 5/2 = 2.5; por tanto, x = 20.56º, y = 58.20º y SPR = 90º - (20.56º + 68.20º) = 1.24º. [2]

Este ejemplo y sus generalidades han atraído la atención de muchos matemáticos, entre ellos Lewis Carroll, se basa en la relación 5 13 – 82 = 1. (Recuérdese que las dimensiones de la figura dada eran 8 por 8 y las del rectángulo 5 por 13). Los números 5, 8 y 13, son términos consecutivos de la serie de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Cada término de esta serie, después de los dos primeros, es la suma de los dos que preceden. Es decir, 0 + 1 = 1.

El Maestro Anfossi en su *Geometría Analítica* (ejercicio 40) plantea también este interesantísimo problema. Fig. 31, 32. Y en *Geometría Analítica* (soluciones), demuestra que los puntos H1', H'´, G, no pertenecen a la misma recta. (Fig. 31):

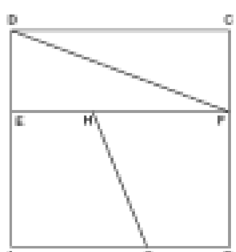


FIG. 31

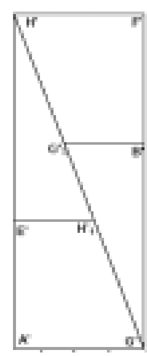


FIG. 32

El cuadrado A B C D (fig. 31) tiene 8 unidades de lado. En los lados AB y AD se señalan los puntos G y E, a 5 u. de A. Por E se traza una paralela a AB y en ella se marca el punto H, a 3 u de E se unen los puntos G y H, y se traza la diagonal DF.

[2] NORTRHOP, E. *Paradojas matemàticas.* UTEHA, México, s.a., pp. 64-66.

Luego se colocan los dos cuadriláteros AGHE y BFHG y los triángulos rectángulos DEF y FCD como lo indica la figura 32, y se forma así el rectángulo A´G´F´H´ de 13 u. de alto y 5 u. de base, siendo el rectángulo equivalente al cuadrado, resulta que ¿ 65 = 64, o lo que es lo mismo 1 = 0 ?. ¿Dónde está el error?

Haciendo coincidir el origen con A´, se tiene que las coordenadas de H´1, H´y G´son las siguientes: H´1 (3,5); H´(0,13) y G´(5,0). Obténgase las pendientes H´H´1 y G´(5,0).

$$\frac{13-5}{0-3} = -\frac{8}{3} \qquad ; \qquad \frac{0-5}{5-3} = -\frac{5}{2}$$

No siendo estas pendientes iguales, los tres puntos anteriores no están alineados y por consiguiente, las cuatro figuras no coinciden en sus bordes perfectamente; como aparentemente parece [3]

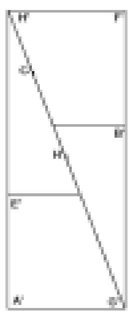


Figura 31

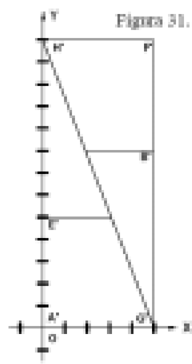


Figura 31’

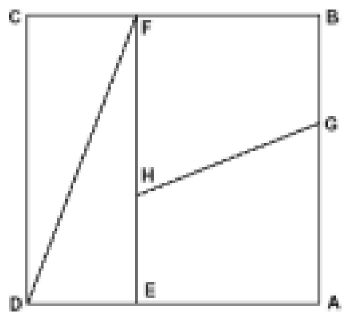
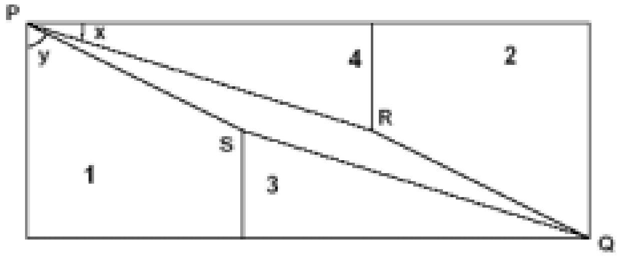


Figura 32

Cada uno de los autores mencionados establece que existe un error en la proposición que nos ocupa, pero ni éstos ni otros muchos señalan *cómo se determina cuantitativamente el valor del área en cuestión*, por ello, he aquí mi particular aportación en base a lo expuesto por Northrop y por Anfossi.

1.- En la figura 20c Northrop, los lados: PS y PR del triángulo SPR, pueden determinarse fácilmente, en efecto:

[3] ANFOSSI, A. *Geometría Analítica. (Problemas).* Progreso. México, s.a., pp. 47-48.



$\overline{PR}$ = 8.544 u y $\overline{PS}$ = 5.385 u. El lado SR del triángulo SPR.
0.9363 0.9284

se calcula aplicando a dicho triángulo la Ley de los Cosenos, con los siguientes datos:

$\overline{PR}$ = 8.544 u; $\overline{PS}$ = 5.385 u; ángulo SPR = $(1.24)^o$

$$\overline{SR} = \sqrt{(\overline{PR})^2 + (\overline{PS})^2 - 2(\overline{PR})(\overline{PS})\cos SPR}$$

$$\overline{SR} = \sqrt{(8.544)^2 + (R.385)^2 - 2(8.544)(5.385)(0.9997)}$$

$$\overline{SR} = \sqrt{101.997 - 91.991} = \sqrt{10.006} = 3.163 \text{ u}$$

Si aplicamos la fórmula de Heron de Alejandría para calcular el área del triángulo SPR, conocidos sus tres lados, con los siguientes datos; se tiene:

$\overline{PR}$ = 8.544 u; $\overline{PS}$ = 5.385 u; $\overline{SR}$ = 3.163 u; S = Semiperimetro = ½ ($\overline{PR}$ + $\overline{PS}$ + $\overline{SR}$) = 8.546 u.

$$\text{A} = \sqrt{S(S - \overline{PR})(S - \overline{PS})(S - \overline{SR})}$$

$$\text{A} = \sqrt{(8.546)(8.546 - 8.544)(8.546 - 5.385)(8.546 - 3.163)} = \sqrt{(8.546)(0.034)} = 0.548 \text{ u}^2.$$

Este es el valor del área del triángulo SPR y es igual al área del triángulo SQR. Ya que la diagonal del paralelogramo PSQR, divide a ésta en los triángulos congruentes SPR y SQR, se tiene que el área del paralelogramo PSQR es: 0.538 u2 + 0.538 u2 = 1.076. Este procedimiento nos da una aproximación de 0.076 en exceso, es decir, setenta y seis milésimas más que la unidad.

2.- Aplicando la fórmula para calcular el área de un triángulo conocidos dos de sus lados, y el ángulo comprendido entre ellos, (fig. 20c), con los siguientes datos:

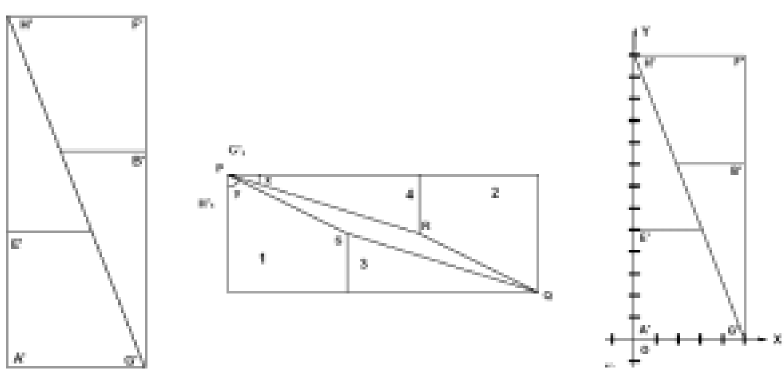
$\overline{PR}$ = 8.544 u; $\overline{PS}$ = 5.385 u; ángulo SPR = (1.24)º
A = ½ ($\overline{PR}$) ($\overline{PS}$) Sen SPR = ½ (8.544 u) (5.385 u) (0.0216) = 0.497 u^2.
Por lo expuesto en (1); el área del paralelogramo PSQR, es igual a:
(2) (0.497 u^2) = 0.994 u^2.

Al aplicar este método, se obtuvo una aproximación de 0.006 por defecto o sea: seis milésimas menos que la unidad.

En ambos casos se llegó a una aproximación muy aceptable a la mitad de la unidad cuadrada, en éste más que en el primero; sin embargo, hay procedimientos no de aproximación sino precisos para determinar el valor del área que se busca y son por geometría analítica (área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices), área del cuadrilatero en función de las coordenadas de sus vértices;[4] cálculo integral (integración definida) y análisis vectorial (aplicación del valor absoluto del producto vectorial).

Solución por geometría analítica

En la figura 31´ (Anfossi); llamado (X1,Y1) a las coordenadas de H1; (X2,Y2) a las coordenadas de H1; (X3,Y3) a las coordenadas de G´, y aplicando la fórmula para determinar el área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices, se tiene:[5]



[4] ANFOSSI, A. *Geometría Analítica. (Soluciones).* Progreso. México, s.a.

[3] S. DE LA BORBOLLA, Francisco. *Ejercicios y problemas de Geometría Analítica.* UTHEA. México, s.a., pp. 47-48.

$$A = \pm \tfrac{1}{2}\left[X_1(Y_2-Y_3)+X_2(Y_3-Y_1)+X_3(Y_1-Y_2)\right]$$

Ya que se eligió previamente un sentido positivo, prescindimos del doble signo:

$$A = \tfrac{1}{2}\left[0(5-0)+3(0-13)+5(13-5)=\frac{1}{2}(-39+65-25)\right]=\frac{1}{2}(-64+65)$$

$\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$ ¡por lo tanto! $A = \tfrac{1}{2}\,u^2.$

Esta es el área del triángulo cuyos lados son $\overline{PS}, \overline{SQ}, \overline{PQ}$ en la figura 20 (c), en donde PQ es la diagonal mayor del paralelogramo PSQR. Como el triángulo PRQ es congruente con el triángulo PSQ cuya área mide 0.5 u2, se sigue que el área del triángulo PRQ mide también 0.5 u2 y que el área del Paralelogramo PSQR es igual a 0.5 u2 + 0.5 u2 = ¡Una unidad cuadrada! ¡He aquí el valor de la unidad que se oculta en una *hendidura* según Peterson y Hashisaki *del paralelogramo PSQR* de Northrop y del área diferente de cero del maestro Anfossi!

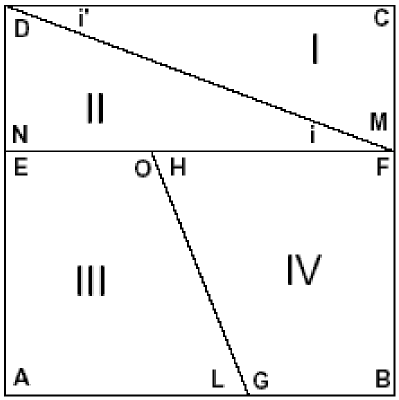
En conclusión refiriéndonos al título de este artículo:

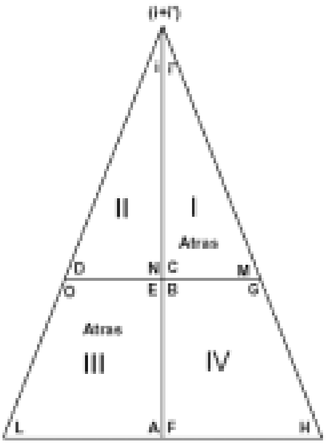
¿Setenta y cinco igual a setenta y cuatro, o lo que es lo mismo uno igual a cero? ¡es falso! El área del cuadrado es igual al área del rectángulo porque:

El área del rectángulo = 65 u2 – el área del paralelogramo PSQR = 65 u2 – 1 = ¡64 u2!

En la matemática lo verdadero es verdadero y lo falso es falso pero nunca ambos al mismo tiempo, y mucho menos uno por lo otro. ¡Si todas las cosas tuvieran el valor de verdad que tiene esta maravillosa ciencia, sin duda alguna todo sería mejor!, pues no habría lugar para sofismas, porque tarde o temprano éstos se despejarían.

Debe hacerse notar que si se forma un triángulo con las cuatro piezas que forman el cuadrado en lugar del rectángulo, el algoritmo a seguir es exactamente el mismo, sólo que en este caso se presenta la siguiente interrogante: ¿Será Isósceles o no será Isósceles el triángulo en cuestión?





Ejercicios relacionados con el tema:

Geometría Analítica.- Aplicaciones del punto y de la recta.

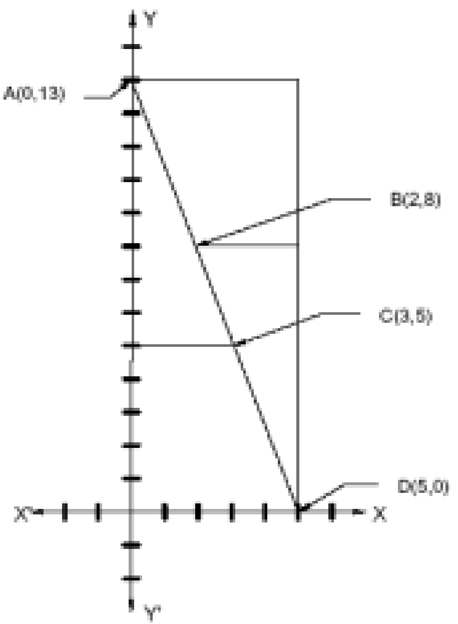


FIG.3

Problemas

1. Si las coordenadas de los puntos B y C son respectivamente (2,8) y (3,5).

Determinar BC y comprobar que este valor es muy aproximado al del lado del paralelogramo PSQR, figura 20 (c).

Respuesta: $\overline{BC} = \sqrt{10} = 3.16227$

2. De acuerdo con el teorema que dice *En todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes*, demostrar que el cuadrilátero ABDC es paralelogramo.

Respuesta: $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{73}$; $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{29}$

3. Sabiendo que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio:

a. Demostrar que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ y son las diagonales del paralelogramo ABDC.

b. Determinar las ecuaciones de las diagonales del paralelogramo ABDC.

c. Determinar el conjunto solución de las ecuaciones de las diagonales y comparando esta respuesta con la del inciso (a), obtener conclusiones.

Respuestas:

a) Punto medio de AD: $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$ punto medio de BC: $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$

b) Ecuación de la diagonal $\overline{AD}$ = 13 x + 5y – 65 = 0

Ecuación de la diagonal $\overline{BC}$ = 13x + Y – 14 = 0

c) $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$ Esta respuesta es igual a la del inciso (a); lo que demuestra que el punto de coordenadas $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$ pertenece a la intersección de las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

4. En base al teorema que dice *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo*. Comprobar que ABDC es un paralelogramo.

Ecuación del lado $\overline{AC}$ = Bx + 3y – 39 = o rectas.
Ecuación del lado $\overline{BD}$ = Bx + 3y – 40 = 0 paralelas.
Ecuación del lado AB = 5x + 2y – 26 = o rectas.
Ecuación del lado CD = 5x + 2y – 25 = 0 paralelas.

5. Determinar el área del triángulo ABD. ¿Qué relación tiene este triángulo con el triángulo ACD

Respuesta: Aárea del triángulo ABD: $= \frac{1}{2} u^2$.
Los triángulos ACD y ABD son congruentes.

6. Aplicando la formula para determinar el área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices, determinar el área del polígono ABCD.

Respuesta: Área del polígono ABCD igual a una unidad cuadrada.

7. De acuerdo con el teorema que dice: *Si los ángulos de un cuadrilátero son congruentes, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo*. Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo.

Respuesta: El ángulo CAB es congruente con el ángulo CDB; ambos tienen por medida el ángulo cuya tangente es: 1/46 en forma similar al ángulo ACD es congruente con el ángulo ABD y ambos tienen por medida el ángulo cuya tangente es = –1/46.

8. Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta, comprobar que la distancia de los puntos B y C, a la diagonal AD en el paralelogramo ABCD es la misma.

Respuesta: $\text{Distancia} = \frac{1}{\sqrt{194}} = \frac{\sqrt{194}}{194}$

9. Determinar el área de los triángulos congruentes ACD y ABD, aplicando la fórmula clásica para calcular la superficie de un triangulo: área igual a la semisuma del producto de la base por la altura. Sugerencia: Determinar la base AD.

Respuesta: Area igual a … ¡Un medio!

10. Sabiendo que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio:

a. Demostrar que AD y BC son las diagonales del paralelogramo ABDC

b. Determinar las ecuaciones de las diagonales del paralelogramo ABDC

c. Determinar el conjunto solución de las ecuaciones de las diagonales y comparando esta respuesta con la del inciso (a), obtener conclusiones.

Respuestas:

a. Punto medio de AD: (5/2,!3/2) punto medio de BC: (a)

b. Ecuación de la diagonal AD = $13x + 5y - 65 = 0$

c. Ecuación de la diagonal AD = $3x + y - 14 = 0$

(5/2, 13/2) Esta respuesta es igual a la del inciso (a); lo que demuestra que el punto de coordenadas (5/2, 13/2) pertenece a la intersección de las AD y BC.

11. En base al teorema que dice *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelas, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo*. Comprobar que ABDC es un paralelogramo

Ecuación del lado: AC = $8x + 3y - 39 = 0$ rectas

Ecuación del lado: BD = $8x + 3y - 40 = 0$ paralelas

Ecuación del lado: AB = $5x + 2y - 26 = 0$ rectas

Ecuación del lado: CD = $5x + 2y - 25 = 0$ paralelas

12. Determinar el área del triangulo ABD, a) ¿Qué relación tiene este triangulo con el triangulo ACD?

Respuesta: Área del triangulo ABD: = ½ U2.

a. Los triángulos ABD y ACD son congruentes.

13. Aplicando la fórmula para determinar el área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices, determinar el área del polígono ABDC.

Respuesta: Área del polígono ABDC: igual a una unidad cuadrada.

14. De acuerdo con el teorema que dice; s*i los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, dos a dos, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo,* demostrar que el cuadrilátero ABDC es un paralelogramo.

Respuesta: El ángulo CAB es congruente con el ángulo CDB; ambos tienen por medida el ángulo cuya tangente es 1/46, en forma similar el ángulo ACD es congruente con el ángulo ABD y ambos tienen por medida el ángulo cuya tangente es –1/46.

Los resultados que se obtuvieron por aproximación trigonométrica y por exactitud analítica se confirman al aplicar la integral definida; porque el cálculo diferencial e integral sigue siendo la herramienta mas sólida con que cuenta la matemática en la solución de problemas prácticos.

Ejercicio

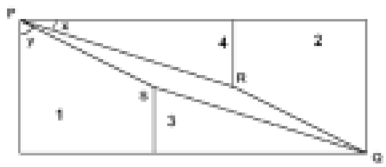
Aplicando la integral definida, al triangulo cuyos vértices son: A(0,13), B(2,8) yD(5). Comprobar:

a. Que el área del triángulo ABD es igual a un medio.

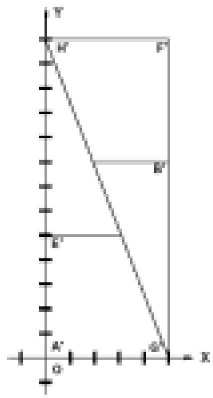
b. Que la suma de las áreas de los triángulos ABD y ACD es igual al área del paralelogramo ABCD; igual a una unidad cuadrada.

Soluciones por:

1. Calculo integral.



2. Vectorial.



1. La figura 4 basada en la figura 20(c) de Northorop y 32 de Anfonssi, representa el área de un triangulo ACD; que por integración se obtiene descomponiéndola en la áreas A1 y A2, representadas en las figuras 5.A y 5.B.

Las ecuaciones de las rectas AC, CD y AD, se obtienen aplicando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Aplicación de la integral definida para la solución del probelma

Consideremos la siguiente: Figura exagerada

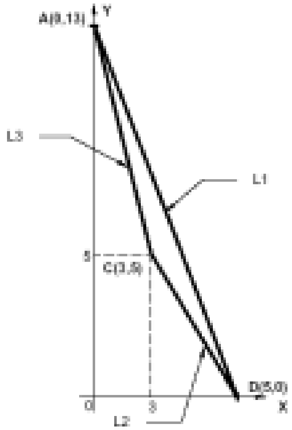


FIG. 4

Las ecuaciones de los lados del triángulo ACD son:

$$Y_{AC} = -\frac{8}{3}x + 13 \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } L3$$

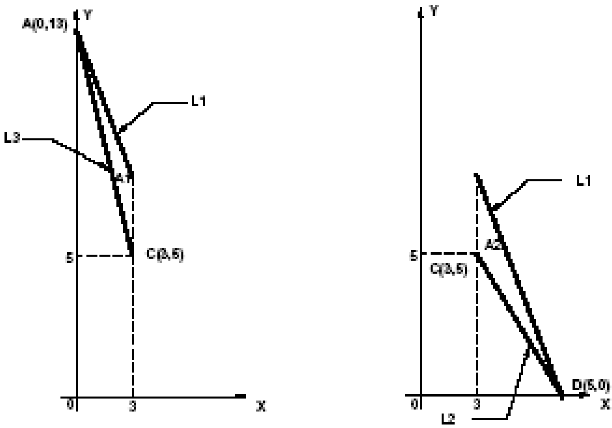
Integrando

$$= -\frac{13}{5}x + 13 \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } L1$$

$$Y_{CD} = -\frac{5}{2}x + \frac{25}{2} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } L2$$

SOLUCION POR: $\int_0^A dA = \int_0^A (A_1 + A_2)dA$

$$A_1 = \int_0^3 (L_1 - L_3)dx \;;\; A_2 = \int_3^5 (L_1 - L_2)dx$$



$$A_1 = \int_0^3 (L_1 - L_3)dx \qquad A_2 = \int_3^5 (L_1 - L_2)dx$$

INTEGRANDO:

$$A = A_1 + A_2$$

$$\int_0^3 (L_1 - L_3)dx + \int_3^5 (L_1 - L_2)dx = \int_0^3 L_1 dx + \int_3^5 L_1 dx - \int_0^3 L_3 dx - \int_3^5 L_2 dx =$$

$$\int_0^5 (-\frac{13}{5}x + 13)dx - \int_0^3 (-\frac{8}{3}x + 13)dx - \int_3^5 (-\frac{5}{2}x + \frac{25}{2})dx =$$

$$-\frac{13}{5}\int_0^5 xdx + 13\int_0^5 dx - [-\frac{8}{3}\int_0^3 xdx + 13\int_0^3 dx] - [-\frac{5}{2}\int_3^5 xdx + \frac{25}{2}\int_3^5 dx] =$$

$$-\frac{13}{5}\int_0^5 xdx + 13\int_0^5 dx + \frac{8}{3}\int_0^3 xdx - 13\int_0^3 dx + \frac{5}{2}\int_3^5 xdx - \frac{25}{2}\int_3^5 dx$$

Resolviendo las integrales, determinando límites y sustituyendo valores:

El area del triangulo acd es igual a…

$$¡\frac{1}{2}u^2!$$

Solución vectorial:

NOTA: $V(\overrightarrow{AC})$ es el vector que tiene el segmento de recta dirigida $\overrightarrow{AB}$ como una representación:

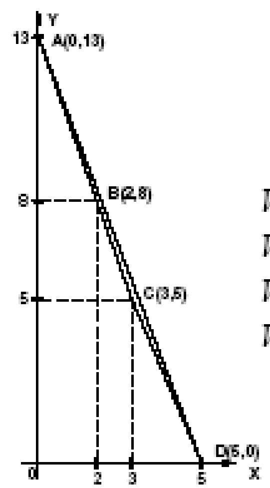


FIGURA EXAGERADA

$$V(\overrightarrow{AC}) = [(3,0),(5,13)] = (3,-8)$$
$$V(\overrightarrow{CD}) = [(5,-3),(0,-5)] = (2,-5)$$
$$V(\overrightarrow{AB}) = [(2,0),(8,-13)] = (2,-5)$$
$$V(\overrightarrow{BD}) = [(5,-2),(0,-8)] = (3,-8)$$

Ya que $V(\overrightarrow{AC}) = V(\overrightarrow{BD})$ y que $V(\overrightarrow{AB}) = V(\overrightarrow{CD})$; se sigue que AC es paralelo a BD y que DB es paralelo a CD; por lo tanto $ABCD$ es un paralelogramo.

Sea $P = V(\overrightarrow{AC})$ y $Q = V(\overrightarrow{AB})$ el producto vectorial $P \times Q$ es:

$(3i - 8j) \times (2i - 5j) = 6(i \times i) - 15(i \times j) - 16(j \times i) + 10(j \times j) =$

$6(0) - 15(k) - 16(-k) + 0 = -15k + 16k = k$. Por lo tanto:

El producto vectorial $P \times Q$ es igual a k.

$$|P \times Q| = \sqrt{1} = 1$$

Otro procedimiento: $P = V(\overrightarrow{AC}); Q = V(\overrightarrow{AB})$

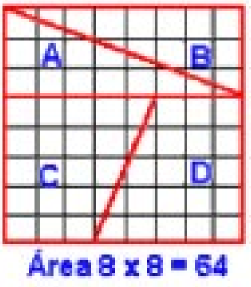
$$P = V(3,-8); Q = V(2,-5)$$

$$P \times Q = \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (15) - (-16) = -15 + 16 = 1u^2$$

Área del paralelogramo ABCD = 1 u^2.

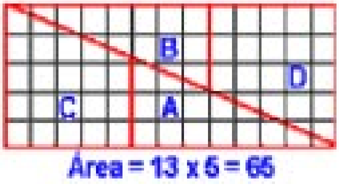
La paradoja del cuadrado

Dibuja un cuadrado de 8 cm por lado y recorta los dos triángulos y los dos trapcecios como se indica.



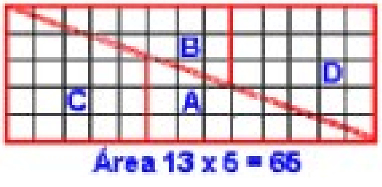
Coloca los trozos A, B, C y D en la forma en que se indica. Resulta un rectángulo de lados: largo = 13 cm., ancho = 5 cm.

Coloca los trozos A, B, C y D en la forma en que se indica. Resulta un rectángulo de lados: largo = 13 cm., ancho = 5 cm.



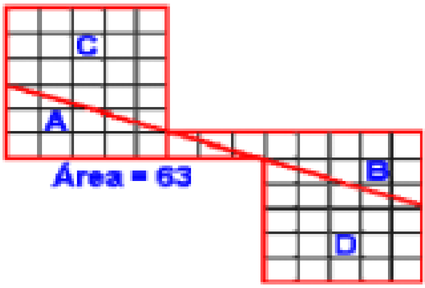
Coloca los trozos A, B, C y D en la forma en que se indica.. Resulta un rectángulo de lados: largo = 13 cm., ancho = 5 cm.

Como el rectángulo se compone de los mismos trozos que el cuadrado, deben tener la misma área. Sin embargo:Área del cuadrado: 8 cm. x 8 cm. = 64 cm. cuadradosÁrea del rectángulo = 13 cm. x 5 cm. = 65 cm cuadrados¿Cómo esta diferencia de 1 cm. cuadrado?



En realidad, entre el rectángulo de lados 13 cm y 5 cm y el construido con las piezas A, B, C y D queda un pequeño espacio, imposible de detectar a simple vista, de 1 mm de ancho y que en total tiene 1 cm cuadrado, que es la diferencia entre 64 y 65 centímetros cuadrados.Las sorpresas de este tipo se llaman paradojas de Hooper, porque este auto las presentó William Hooper en su obra *Rational Recreations* en 1795.

Sam Lloyd mostró ingeniosamente que las piezas pueden disponerse de forma que aparentemente sea 8 x 8 = 63:



La paradoja del cuadrado se debe a Lewis Carrol, matemático y escritor británico cuyo verdadero nombre es Charles Lutmidge Dogson. En su obra *Alicia en el País de las Maravillas*, manifiesta su interés por lo absurdo, los acertijos y la confusión.▲

BIBLIOGRAFÍA

PETERSSON-HASHISAKI. *Teoría de la Aritmética*. Limusa. México, s.a.

NORTHROP, Eugene P. . *Paradojas Matemáticas*. UTHEA. México, s.a.

ANFOSSI, Agustín *Geometría Analítica*. (Problemas). Progreso. México, s.a.

—. *Geometría Analítica*. (Soluciones). Progreso. Biblioteca CUM. México, s.a.

DE LA BORBOLLA, Francisco. *Ejercicios y probemas de Geometría Analítica*. UTHEA. México, s.a.

MÉNDEZ Heredia, Albino. *¿64=65?,o lo que es lo mismo ¿0=1?* Registro de derecho de autor Nº 91196/ 86 libro 4 a fojas 743.