

La noción de proporcionalidad¹

Alejandra Rodríguez Díaz

Maestría en Psicogenética. IMCED

Jesús Roberto Pérez García

Matemática Educativa. UMSNH

Introducción

En el presente artículo se reportan los resultados obtenidos de la investigación realizada sobre el proceso constructivo de la noción de proporcionalidad en estudiantes del tercer ciclo de educación primaria. El estudio se centra en las competencias que manifiestan los estudiantes, en las estrategias que utilizan y en las dificultades que obstaculizan la solución de problemas que involucran el uso del razonamiento proporcional.

En los actuales planes y programas de estudio de matemáticas para la escuela primaria se plantean como propósitos básicos la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades a partir de la resolución de problemas.

En lo que respecta a la proporcionalidad, ésta ocupa un lugar importante en el mapa curricular al ser considerada como una herramienta cognitiva que permite la apropiación de conocimientos además de desarrollar el pensamiento relacional que posibilita vincular las matemáticas con otras asignaturas como la Física, la Química, la Biología, la Historia, Geografía y Arte.

No obstante la importancia de esta noción, considerada como la “síntesis de la aritmética” y que “a pesar de la frecuencia con que las empleamos, las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas. Esto se debe a que, además de ser un tema relativamente complicado, está enfocado de manera mecánica a la regla de tres”,² lo que conlleva a deficiencias constructivas en los estudiantes.

1 Título autoral: “La construcción de la noción de proporcionalidad. Un estudio psicogenético sobre la construcción de las nociones aritméticas”.

2 MOCHÓN, S. “Razón y Proporción” en O. Figueras, G. López y S. Mochón. *Matemáticas. Guía para el maestro. Sexto grado de Educación Primaria*. SEP, México, 1992. p. 14

Se abordan los principios de orden teórico y metodológico que se emplearon en la investigación. Asimismo se incluye una sección donde se presentan los resultados obtenidos y algunas implicaciones para su enseñanza.

1. Antecedentes teóricos

Dentro del campo de la Psicología y de la Educación Matemática, la proporcionalidad ha sido objeto de varias investigaciones desde diferentes perspectivas, las cuales han aportado importante información.

Winch³ estudia la habilidad de los estudiantes de la escuela elemental para resolver correctamente problemas de proporción y en su reporte da cuenta de tres métodos de solución que ellos emplean:

- La búsqueda del valor unitario, que consiste en encontrar el valor correspondiente a la unidad, en ella subyace la pregunta ¿cuántos para uno?, accediendo a éste por medio de una división.
- El razonamiento aditivo, el cual se basa en comparaciones por medio de diferencias.
- El razonamiento cualitativo se basa en comparaciones como “mayor que”, “más que” o “igual que” sin llegar a una cuantificación de las mismas.

El primer método de la búsqueda del valor unitario se reconoce como el usado con mayor frecuencia, lo cual lo lleva a expresar la siguiente hipótesis: “Los problemas en los que hace mención explícita de las cantidades unitarias son más sencillos que aquellos en los que no hace referencia de dichas cantidades”.⁴

Piaget,⁵ en relación con el pensamiento proporcional centra su atención en las características cuantitativas y cualitativas de los acercamientos de los niños y adolescentes para resolver tareas que requieren del razonamiento proporcional, el cual es caracterizado de acuerdo a varios momentos:

- Primeras etapas en las cuales el pensamiento hace uso de correspondencias y seriaciones cualitativas.

3 Citado en Karplus, R. *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. 1983.

4 *Ibid.* p.45.

5 Piaget, citado en Gómez, H. *Indicios del pensamiento proporcional*. 1996.

- Etapas intermedias de compensaciones aditivas o el uso de razones 2:1.
- Etapas avanzadas en las cuales se aplica el razonamiento proporcional sin importar los valores numéricos de los datos y las razones.

Piaget también afirma que “el razonamiento proporcional, junto con la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un cierto número de variables en un problema, resultaban especialmente indicativos de la habilidad para razonar formalmente”.

En relación a las estrategias que utilizan los niños Karplus⁶ propone cuatro categorías, producto del análisis de los diferentes métodos de solución empleados por los alumnos en tareas que involucran el razonamiento proporcional:

- Incompleta–Ilógica, cuando adivinan la respuesta o emplean una operación cuantitativa inapropiada.
- Cualitativa, si comparan las cuatro cantidades dadas, usando los términos “más”, “menos” o términos equivalentes.
- Aditiva, al comparar los datos a partir de diferencias o residuos.
- Razonamiento proporcional, si usan datos para calcular y comparar relaciones proporcionales.

Hart,⁷ identifica y caracteriza una estrategia denominada “Pre–proporcional” que se caracteriza por un razonamiento correcto que no se basa en el planteamiento de una proporción mediante la comparación de dos razones; sino en una combinación de duplicar, triplicar, tomar medios, o procesos de ese tipo y sumar las contribuciones correspondientes.

Lesh y Cramer⁸ al estudiar el razonamiento proporcional, lo ubican como un cimiento del álgebra y como una síntesis de la aritmética. Investigan las dificultades por las que atraviesan los estudiantes al resolver tareas de proporcionalidad y por el tipo de estrategias que utilizan. Dos son los aspectos que destacan estos autores:

⁶ KAPLUS. *Op.cit.* p. 47

⁷ *Ibid.* p. 48

⁸ GÓMEZ. *Op.cit.* p. 11

- a) El reconocimiento del uso y la importancia de los métodos intuitivos.
- b) La reconsideración de las situaciones de tipo cualitativo como favorecedoras del empleo del razonamiento proporcional a diferencia de quienes han planteado que las respuestas de tipo cualitativo identifican a los sujetos que no aplican el razonamiento proporcional.

En un contexto nacional también se han realizado investigaciones al respecto. En el Departamento de Matemática Educativa, dependiente del Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), se han desarrollado investigaciones sobre los Indicios del Pensamiento Proporcional y temas directamente relacionados como son los de Razón y Fracciones.

Hilda Gómez⁹ considera importante el estudio con adolescentes y a la vez, intenta rastrear el pensamiento proporcional en los estudiantes de nivel primaria, es decir, de 6 a 12 años de edad. Identifica competencias que los niños despliegan para dar la respuesta, así como las estrategias más comunes que se presentan en la solución y, por otro lado, identifica aquellos elementos que vienen a complejizar la tarea.

El trabajo que aquí se reporta considera al “razonamiento proporcional” como el concepto que sustenta esta investigación, entendido éste como un proceso cognitivo que parte de la caracterización que hace Lesh el cual lo considera como:

... una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariedad y de comparaciones múltiples, así como la habilidad de acumular y procesar mentalmente varios fragmentos de información, se encuentra muy relacionado con la inferencia y la predicción e involucra ambos métodos de pensamiento: el cualitativo y el cuantitativo.¹⁰

Dos aspectos se derivan de esta caracterización del razonamiento proporcional:

El “razonamiento cualitativo”, se refiere al uso de comparaciones, correspondencias y seriaciones de tipo cualitativo. Por ejemplo: un niño al

9 GÓMEZ, H. *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, 1996.

10 *Ibid* p. 12.

comparar el tamaño de la ropa de su hermano mayor con la suya; o bien, al relacionar proposiciones como: el oro es un metal como el oxígeno es un gas.

El “razonamiento cuantitativo”, se refiere a comparaciones que dependen de valores numéricos, siendo éste el campo más frecuente de aplicación de la proporcionalidad.

Lo anterior muestra la importancia de la noción de proporcionalidad, como un conocimiento matemático y una herramienta intelectual. Al mismo tiempo expresa algunos problemas, tales como:

- La manifestación de un bajo dominio por parte de los profesores sobre el tema, lo que implica dificultades para su enseñanza y su aprendizaje.
- Un enfoque mecanicista con el cual ha sido abordado el tema en su enseñanza, manejado como regla de tres.
- Es uno de los contenidos que representa una mayor dificultad en el nivel de primaria tanto en su enseñanza como en su aprendizaje.
- La falta de investigaciones a nivel local.

2. Preguntas de investigación

Para orientar la investigación referida a la problemática mencionada, el trabajo que aquí se reporta asume como problema central la interrogante:

¿Cómo se caracteriza el desarrollo del concepto de proporcionalidad en los estudiantes de educación primaria y cuáles son las competencias y estrategias que despliegan y dificultades que enfrentan al resolver problemas que implican el uso del razonamiento proporcional?

Y especificada con los cuestionamientos:

- ¿Los niños de la escuela primaria identifican la naturaleza cualitativa, aditiva o multiplicativa del cambio en situaciones en las que varía la cantidad de manera proporcional o no proporcional?
- ¿Cuáles son las competencias, estrategias y dificultades que manifiestan los alumnos del tercer ciclo al resolver problemas que involucran proporciones o noción consideradas precursoras de éstas?

A partir de estas preguntas los objetivos específicos que persigue esta investigación son:

- Contar con un instrumento que permita inferir el estado en el cual se encuentra la construcción del concepto de probabilidad en los niños de primaria de nuestro sistema escolar.
- Conocer qué estrategias emplean alumnos del tercer ciclo, de nuestra localidad, para resolver situaciones que implican proporciones o noción consideradas precursoras de éstas.
- Conocer las competencias y las dificultades que tienen los estudiantes del tercer ciclo, de nuestra localidad, al solucionar problemas que implican cambios cualitativos, aditivos o multiplicativos de tipo proporcional.

3. Aspectos metodológicos.

El enfoque metodológico desde el cual se desarrolla esta investigación, es de corte cualitativo, al explicar, desde un referente teórico, el sentido de las respuestas que dan los niños al resolver situaciones que involucran el razonamiento proporcional.

Instrumento

Los instrumentos de recolección de datos que dan soporte a esta investigación son: un cuestionario con una serie de situaciones y el protocolo de una entrevista de tipo clínico; diseñados ambos con el propósito de obtener evidencias acerca de las competencias y estrategias que emplean los alumnos en problemas vinculados con la proporcionalidad. En este apartado se definen y organizan los aspectos a indagar y, en consecuencia, se seleccionan, adecuan y diseñan las tareas que conforman el cuestionario considerando:

- La diversidad de problemas planteados por investigadores de la educación matemática que se han interesado en el estudio del razonamiento proporcional, eligiendo y adaptando algunos de ellos para integrarlos al cuestionario. Basados en las siguientes fuentes documentales: Fiol y Fortuny (1990), Karplus (1981), Hart (1978), Noelting (1980), Gómez *et al.* (1996).
- Los problemas sobre razón y proporción contenidos en los libros de texto vigentes en la educación primaria del segundo y tercer ciclo.

- Los problemas sobre razón y proporción contenidos en la *Guía para el maestro de 6º año* (1992).

Para la elección de las tareas se consideró inicialmente los aspectos: “cualitativo”, “numérico” y “geométrico”.

El “aspecto cualitativo” se sustenta en planteamientos de diversos investigadores como Cramer (1993) y Streefland (1978), quienes consideran que el desarrollo del razonamiento proporcional empieza con la comparación cualitativa e implica un razonamiento a largo plazo; o Piaget, quien describe que en las etapas tempranas del desarrollo intelectual se hace uso de correspondencias y seriaciones cualitativas. Las consideraciones de estos autores sustentan el interés de esta investigación, por conocer las competencias de los alumnos pequeños ante situaciones de este tipo así como las estrategias que emplean al resolver dichas tareas.

La incorporación de nociones “geométricas”, como semejanza y escala, se justifican con afirmaciones como la de Freudhental¹¹ quien dice que “el niño desde pequeño aprecia algunas relaciones proporcionales a partir de visualizar el mundo que lo rodea”. Por otro lado Piaget¹² afirma que “...la génesis de la proporción se tiene que buscar en la percepción de las figuras”. La aplicación de situaciones que incluyen Escalas, tiene la ventaja de que pueden visualizarse geométricamente, por lo cual pueden servir para indagar nociones relacionadas con la razón y proporción.

En lo que respecta al aspecto “numérico”, consideramos que éste es el campo donde la proporcionalidad tiene su mayor aplicación y es el que más se relaciona con la vida cotidiana del niño. Por lo cual las situaciones incluyen comparaciones que dependen de valores numéricos y por lo tanto demandan una respuesta del mismo tipo.

Algunas de las tareas que se aplicaron en esta investigación fueron usadas en otras investigaciones, otras fueron adaptadas a contextos familiares con los estudiantes y los propósitos de la investigación.

La versión final del cuestionario que se diseña considerando los puntos anteriores, se conforma de diecisiete tareas.

11 FREUDHENTAL, en Fiol, M. *Proporcionalidad directa*. Síntesis. España, 1990. p. 122

12 *ibid* p. 105.

A continuación se describen cada una de las situaciones puntuizando el propósito específico que se persigue para fines de esta investigación. Para una organización de las tareas y para fines de su explicación, éstas se agrupan dependiendo de la noción que subyace y de las relaciones numéricas que involucran.

Procesos comparativos en situaciones de variabilidad

Las situaciones aquí incluidas vinculan comparaciones cualitativas de escalas, comparaciones parte–todo y situaciones de covariación relacionada. Estos tres aspectos se consideran precursores en el desarrollo de la noción de proporcionalidad, por ser procesos en los que se pone de manifiesto la habilidad del resolutor para establecer comparaciones en situaciones de variabilidad, que le permitan reconocer el cambio implicado, el sentido del mismo y su posible regularidad.

Casos–Sucesiones.— Esta situación está ligada a una variación conjunta variando la posición de cada uno de los términos. El propósito es que el niño proporcione los números objeto de la pregunta, teniendo qué identificar la regularidad de los datos en una parte de la progresión aritmética y extendiéndola de acuerdo con la posición del término buscado.

Fotografía.— La tarea consiste en que el niño identifique una figura que sea semejante a un modelo dado de entre cuatro imágenes diferentes.

Conceptos simples relacionados con la proporcionalidad.— En las tareas que integran este rubro la demanda implica el establecimiento de relaciones ligadas a las nociones de doble, triple, un medio, un cuarto, etc. Las tareas incluidas en este grupo tienen como característica en común: encontrar un término desconocido en una proporción.

Rectángulo.— La tarea corresponde a un problema de *valor perdido* en la modalidad de escalas con figuras bidimensionales, en una superficie reticular. La demanda es reproducir un rectángulo dado un lado que indica una escala 1:3, la cual tiene que ser determinada

Perro.— Esta actividad es un problema con información pictórica. Se demanda reproducir la figura a una escala de doble, donde se proporciona la figura de referencia bidimensionalmente y en un contexto geométrico reticular, donde la unidad de medida a considerar es el cuadro.

Muñecos de Alambre.— Esta situación es un problema con información pictórica y un código gráfico. La demanda es construir una figura a escala, dando otra de referencia y el factor de proporcionalidad en un contexto cuantitativo gráfico. El propósito es indagar acerca de las nociones de $1/4$ y $2/3$ en un contexto gráfico .

Carretera.— Éste es un problema en la modalidad de escala. Se demanda hallar el término desconocido de una proporción, cuyos tres valores restantes están dados en forma gráfica y numérica. No se da el valor unitario aunque la relación que se favorece orienta su búsqueda.

Tazas de arroz.— Esta actividad corresponde a un problema con información de tipo pictórico y numérico. Se demanda hallar el valor desconocido de una proporción .

Receta.— Esta actividad corresponde a varios problemas relacionados con información numérica y tabular. Se demanda hallar valores desconocidos de una tabla en la que intervienen distintos tipos de cantidades y se mantiene una constante de proporcionalidad. ($1/2$, doble, $3/2$)

Chocolates.— Esta tarea corresponde a un problema, el enunciado proporciona información pictórica y numérica, que orienta a la búsqueda del valor unitario.

Monedas.— Esta tarea plantea un problema y la información se proporciona en forma tabular . La demanda consiste en hallar el valor desconocido de una proporción; en el enunciado no se proporciona el valor unitario, pero se orienta a su búsqueda.

Relaciones complejas de proporcionalidad

Las situaciones que se agrupan bajo este rubro, vinculan relaciones numéricas con mayor complejidad que los bloques anteriores. Dos son las características de este tipo de tareas: uno es encontrar el valor desconocido en una proporción, donde las cantidades que se manejan llegan a millares, o bien se encuentran enunciadas con números decimales y también se involucra la noción de porcentaje.

El otro tipo de situación corresponde a la comparación de dos razones para identificar la respectiva igualdad o desigualdad. Situaciones descritas a continuación:

Morelia.— El enunciado corresponde a un problema verbal de densidad de población, la información se proporciona en forma verbal con apoyo pictográfico. En esta tarea se demanda encontrar el valor desconocido de una proporción, y expresarlo como porcentaje.

Supermercado.— Se demanda encontrar un valor desconocido de una proporción, se trata de un problema de tipo verbal con información numérica. Uno de los datos es una cantidad expresada porcentualmente el cual se tendrá que aplicar a una cantidad que es potencia de diez. El enunciado enfatiza el significado de operador.

Piso.— Considerada como de comparación de razones, es un problema que se presenta en el contexto de densidad. El enunciado no contiene datos numéricos, éstos se presentan en forma pictórica. Se demanda una comparación de elementos, área y cantidad de niños. Son cinco las variantes que presenta esta situación.

Mecanógrafas.— Esta situación, que se establece en el contexto de velocidad, demanda la comparación de dos razones numéricas equivalentes, en la que se favorece una razón entera; la petición no está implicando una respuesta cuantitativa.

Naranjada.— Comparación de razones, que no implica una respuesta numérica, se presenta en el contexto de mezclas y corresponde a una desigualdad de razones.

Excursión.— Comparación sucesiva de cuatro razones, el enunciado no proporciona información numérica, sino en forma pictórica. Esta tarea implica la comparación de 4 razones en la que se favorece una razón fraccionaria, en esta tarea los alumnos tienen que determinar cuál es la razón mayor y cuál la menor.

Mermelada.— Formada por dos preguntas donde subyace la noción de porcentaje. Una de las preguntas demanda una respuesta de tipo cualitativo y la otra una respuesta numérica. Se pretende indagar el significado de porcentaje y las estrategias que utilizan los alumnos al solucionar la tarea.

En la tabla siguiente se presenta de una manera global, las tareas aplicadas a los estudiantes en la que se puede identificar: El nombre de la misma, el contexto que se empleo así como la relación que involucra y la demanda.

TAREA	CONTEXTO	RELACIÓN IMPLICADA Y DEMANDA
1. Sucesiones	Patrones numéricos	Distinguir patrones de co-variación, en una progresión aritmética limitada, extendiendo la regularidad de tales cambios de acuerdo con la posición del término buscado.
2. Fotografía	Escalas	Comparación cualitativa identificando la reproducción de un dibujo a una escala diferente.
3. Rectángulo	Escalas	Reproducción a escala de una figura bidimensional. Dada la figura y el lado de la que se va a ampliar, se requiere hallar el factor de proporcionalidad y hacer el dibujo.
4. Perro	Escalas	Reproducción a escala de una figura bidimensional. Dada la figura de referencia y el factor de proporcionalidad se demanda construir otra figura.
5. Muñecos de alambre	Escalas	Reproducción a escala de una figura en un contexto lineal. Dada la figura de referencia y el factor de proporcionalidad se demanda construir otra.
6. Carrera	Escalas	Hallar el término desconocido de una proporción, cuyos valores restantes están en la información gráfica y numérica.
7. Tazas de arroz	Receta	Encontrar el valor desconocido de una proporción, la relación que favorece una razón entera es “dentro” para la tarea del primero y segundo ciclos y “entre” en la tarea del tercer ciclo; los datos numéricos se apoyan con información pictórica.
8. Receta	Receta	Hallar valores desconocidos de una proporción, la relación que favorece una razón entera es “entre”, los datos numéricos se presentan en forma tabular.
9. Chocolates	Compra/venta	Hallar un valor desconocido en una proporción, cuyos valores restantes están dados en información pictórica y numérica, se favorece una relación de tipo “entre”.
10. Monedas	Conversión	Hallar el valor desconocido de una proporción, la relación que favorece una razón entera es “dentro”, el enunciado orienta la búsqueda de un valor unitario.

11. Morelia	Densidad	Hallar un valor desconocido, expresando una razón como un porcentaje.
12. Supermercado	Compra/venta	Hallar un valor desconocido el cual es un porcentaje de una cantidad que es potencia de diez; el enunciado enfatiza el significado de operador.
13. Piso	Densidad	Comparar dos razones; el enunciado no contiene datos numéricos, éstos se presentan en forma pictórica.
14. Mecanógrafo	Velocidad	Comparar dos razones numéricas en las que se favorece una razón entera por medio de una relación “dentro”.
15. Naranjada	Mezclas	Comparar dos razones numéricas en las que se favorece una razón entera a través de una relación “entre”.
16. Excursión	Razones	Comparación de razones, con información gráfica
17. Mermelada	Porcentaje	Encontrar el por ciento mediante la comparación de dos cantidades

Caracterización de las tareas. (Adaptada de Gómez H. 1996, p. 28)

4. Resultados

Como resultado del análisis realizado a las respuestas registradas por los estudiantes a las tareas planteadas, se caracterizan las ideas y procesos que manejan los niños identificando, en particular, las competencias, estrategias y dificultades.

Competencias

Se identifican tres niveles de competencia:

- Nivel inferior de competencia: los niños no relacionan los datos contenidos en la información, ya que su comportamiento da muestra de una focalización en parte de la información.
- Competencia intermedia: los estudiantes dan muestra de una búsqueda de las relaciones, consideran la totalidad de los datos proporcionados; sin

embargo se presentan algunas deficiencias conceptuales en nociones precursoras, que imposibilitan que el niño establezca las relaciones necesarias.

- Competencia relacional: los estudiantes manifiestan una puesta en relación de los elementos de la información, identifican la constante de proporcionalidad o el patrón de regularidad y utilizan adecuadamente los algoritmos.

Estos niveles no son propios de un grado en específico, más bien caracterizan un comportamiento que los niños realizan dependiendo en particular de tres factores: la relación que subyace a la tarea (razones enteras, no enteras, doble triple, comparación de razones, porcentajes), la representación empleada para presentar la tarea (verbal, numérica, pictórica, gráfica, geométrica) y el tipo de números (enteros, decimales).

El nivel de competencia está relacionado con el grupo de tareas establecidas en el cuestionario. En general podemos decir que el nivel de competencia de los estudiantes del tercer ciclo es intermedio.

Estrategias

Los factores que determinaron el empleo de alguna estrategia dependían básicamente de la representación utilizada para presentar la tarea, el tipo de variación implícito (simple o múltiple), la estructura matemática del problema, la relación subyacente y el tipo de números.

- Estrategias ilógicas: tienden a repetir parte de la información o a realizar operaciones de manera arbitraria sin poner en relación la información
- Estrategias de tipo aditivo: utilización de comparaciones aditivas por medio de diferencias.
- Estrategias de tipo multiplicativo: comparaciones multiplicativas, entre la que destaca la reducción a la unidad por medio de la división .

Las estrategias utilizadas están directamente relacionadas con la competencia; a un nivel inferior de competencia, el estudiante manifiesta un centramiento en algún elemento de la información y con él realiza cálculos de manera arbitraria. En un nivel de competencia intermedio, el empleo de estrategias se

caracteriza por ser de tipo aditivo, considerando la información. Y en un nivel de competencia relacional la estrategia empleada es de tipo multiplicativo.

Dificultades

Las dificultades están directamente relacionadas con la representación, la estructura matemática y el tipo de números. Además es importante señalar que las tareas que implicaban la aplicación de una comparación múltiple, en sus respuestas, los niños manifestaron la imposibilidad de establecer dicha comparación. De igual manera las tareas que requerían la aplicación del porcentaje, como una variante de la proporción, resultaron complejas para los niños.

Ante esta situación resulta conveniente preguntar ¿Qué tanto ha favorecido la escuela para que se desarrolle la noción de proporcionalidad y junto con ella el razonamiento proporcional?

Si consideramos la caracterización que hace Lesh del razonamiento proporcional como

una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariedad y de comparaciones múltiples, así como la habilidad de procesar mentalmente varios fragmentos de información (...) e involucra ambos métodos de pensamiento: cualitativo y cuantitativo.

cabe entonces señalar que en general los niños del tercer ciclo se encuentran en un proceso de construcción del concepto, ubicándose en un nivel intermedio, ya que se valen de comparaciones aditivas y utilizan procesos como una combinación de duplicar o triplicar cantidades y sumar sus respectivas contribuciones para resolver tareas que impliquen el uso del razonamiento proporcional.

5. Conclusiones

Las conclusiones a las que se ha llegado en este trabajo, con respecto al desarrollo del concepto de proporcionalidad, son las siguientes:

- 1 Existe una dificultad en los estudiantes para coordinar la atención en situaciones en las que se presenta una variación simultánea de dos cantidades.

- 2 Influencia de la representación como factor importante que se manifiesta en el nivel de competencia evidenciado por los estudiantes.
- 3 Ausencia casi total de conversiones entre representaciones.
- 4 La no utilización, en general, de la estrategia del valor unitario.
- 5 Falta de construcción de un significado del porcentaje, como una aplicación específica del concepto de proporción.

Aunque estas conclusiones surgen de un estudio cualitativo basado en un número reducido de estudiantes, permite identificar comportamientos típicos que, nos atrevemos a conjeturar, ocurren con frecuencia en muchas aulas de la escuela primaria en nuestro país.

Por otro lado las conclusiones expuestas nos llevan a plantear algunas sugerencias para la enseñanza del concepto de proporcionalidad para la escuela primaria:

- Diseñar actividades que reforcen las nociones precursoras: a) identificar diferentes patrones de cambio (cuantitativo) en situaciones de variación simple; b) identificar patrones de cambio (cualitativo) en situaciones de variación múltiple.
- Diseñar actividades que desarrollem la atención sobre la variación cuantitativa de dos cantidades, ya sea aditiva o multiplicativa.
- Emplear diferentes representaciones para ejemplificar situaciones de variación proporcional y no proporcional.
- Promover diferentes estrategias para la resolución de problemas que impliquen proporciones y comparación de razones, particularmente la búsqueda del valor unitario y el uso de diversas representaciones para una misma situación.
- Diseñar actividades que promuevan el aprendizaje del tanto por ciento con significado, antes de que se emplee de manera mecánica.▲

Bibliografía

- BERMEJO, V. *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas*. Paidós/Educador. España, 1990.
- BERMEJO, V. *Desarrollo Cognitivo*. Síntesis. Madrid, 1994.
- BRUNER. *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*. Pablo del Río. Madrid, 1980.
- CARPENTER, T. *Research incognitive development*. National Council of Mathematics Teachers. 1980.
- CARRAHER, T., et al. *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo XXI. México, 1991.
- CASTRO, E. y Castro E. "Representaciones y Modelización". En HORSORI. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Luis Rico. Barcelona, 1997. p.p. 95-124.
- CASTRO, E.; Rico, L. y Castro, E. *Estructuras aritméticas elementales y su modelación*. Trillas. México, 1995.
- CHAMORRO, M. y Belmonte, J. *El problema de la medida*. Síntesis. España, 1991.
- FIGUERAS, O. y Waldegg, G. "La medición en la escuela secundaria". *Cuadernos de investigación* 2. Programa Nacional de Formación y Actualización de Matemáticas. México, 1982.
- FIOL, M. Y Fortuny, J. *Proporcionalidad Directa. La forma y el número*. Síntesis. España, 1990.
- FLORES, A. "Nexos en el razonamiento proporcional: palancas, media aritmética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades". *Educación Matemática* N° 2. VII. Iberoamérica. 1995.
- FREUDENTHAL, H. "Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas". Trad. de Luis Puig. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemática Educativa. 1994.
- GARCÍA, R. "Representaciones en resolución de problemas. Un estudio comparativo con estudiantes españoles y mexicanos". *Memoria de tercer ciclo*. Granada, 2000.
- GÓMEZ, H. *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, 1996.
- HERNÁNDEZ, A. *La enseñanza de la Geometría en el Bachillerato Nicolaita*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Morelos. Cuernavaca, 1999.
- HOYOS, V. "Un estudio exploratorio sobre la asignación de sentido a las representaciones básicas de la variación, al término de la primaria y el inicio de la secundaria" *Educación Matemática* N° 3. VI. Iberoamérica. 1994
- INHELDER, B. y Piaget, J. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Paidós. Buenos Aires, 1972.
- KARPLUS, R. Pulos, S. Y Stage, E. "Proportional reasoning of early adolescents". En Lesh, R. Y M. Landau, (comps). *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. Academic Press. Londres, 1983.
- KLINE, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. I. Alianza Universidad. Madrid, 1992.
- MOCHÓN, S. "Razón y Proporción" en O. Figueras, G. López y S. Mochón. *Matemáticas. Guía para el maestro. Sexto grado de Educación Primaria*. SEP. México, 1992.
- MORENO, E. "Constructivismo y educación matemática ". *Educación Matemática* N° 2. IV. Iberoamérica. México, 1992.
- NUNES, T. y Bryant, P. *Las Matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. Siglo XXI. México, 1997.
- PERRAUDEAU, M. *Piaget hoy. Respuesta a una controversia*. FCE. México, 1996.
- PIAGET, J. *La formación del símbolo en el niño*. FCE. México, 1979.
- PIAGET, J. e Inhelder, B. *La representation de l'espace chez l'enfant*. PUF. 1948
- POZO, J. *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata. Madrid, 1989.
- RESNICK, Laurent y Ford Wendy. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós. Barcelona, 1990.
- Plan y programas de estudio, educación primaria. SEP-CONATEG. México, 1993.
- La enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria. Programa nacional de actualización

- permanente. SEP. México, 1995.
- Libro para el maestro. Matemáticas, Educación Secundaria.* SEP-CONATEG. México, 1996.
- Matemáticas, Cuarto Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Matemáticas, Tercer Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Matemáticas, Segundo Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Libro para el maestro. Matemáticas, Sexto Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Matemáticas, Sexto Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Talleres Generales de Actualización. Matemáticas.* SEP-CONATEG. México, 1999
- Matemáticas, Quinto Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Libro para el maestro, Matemáticas, Quinto Grado.* SEP-CONATEG. México, 1998.
- Docencia Rural: proyecto escolar para mejorar las competencias de razonamiento. Trabajo en el aula.* SEP-CONAFE. México, 1998.
- SKEEMP, R. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Morata. Madrid, 1980.
- VERGANUD, G. *El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Trillas. México, 1991.
- VYGOTSKI, S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Grijalbo. México, 1988.